

קיץ תשפ"ב 2022

עבודת קיץ במתמטיקה לעולים ליא' 5 יח"ל

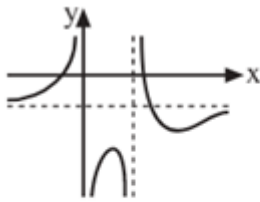
תלמידים יקרים!

כהכנה לקראת לימודיכם במתמטיקה בכיתה י"א וכדי להבטיח את הצלחתכם בבחינות הבגרות בשנה זו, יש לחזור בחופשת הקיץ על החומר הנלמד בכיתה י' בעזרת העבודה המצורפת.

עבודה זו הינה חובה על כל תלמיד!

- ✓ על תכניה תבחנו במבחן הראשון בשנת הלימודים הבאה.
- ✓ לעבודה יינתן משקל בציון מחצית א' במתמטיקה בשנת הלימודים הבאה.
- ✓ את העבודה יש להגיש בקלסר חצי שקוף בשבוע הראשון של שנת הלימודים הבאה, למורה למתמטיקה המלמד.
- ✓ הקפידו על כתיבת עבודה מסודרת, על שרטוטי גאומטריה בתרגילים המתאימים ועל כתיבה מתמטית נכונה.

ענו על התרגילים הבאים – חקירה מלאה של פונקציה רציונאלית (להגשה בקלסר חצי שקוף)



1. בצויר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{12-x^2}{x^2-3x}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ו. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית שלה.
- ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

2. לפונקציה $f(x) = \frac{12x}{x^2-6x+a}$ יש נקודת קיצון בנקודה $x = -3$.

- א. מצא את a.
 - ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 - ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 - ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
 - ח. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
- ב. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
 - ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 - ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

3. לפונקציה $f(x) = \frac{x+b}{x^2+ax-4}$ יש נקודת קיצון בנקודה $(1, -1)$.

- מצא את a ו- b ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

4. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2-4}$ בנקודה $x = 0$ הוא $\frac{1}{2}$.

- מצא את a .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

5. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2-1}{b-x^2}$ בנקודה $x = 1$ הוא $\frac{2}{3}$. הישר

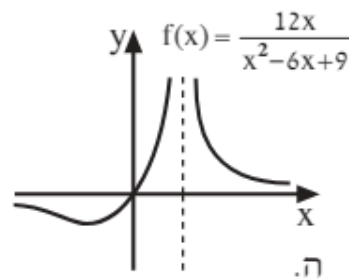
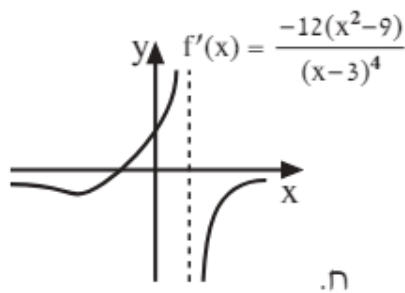
- $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה.
- מצא את a ו- b .
 - הצב את a ו- b שמצאת בפונקציה וחקור אותה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, אסימפטוטות אנכיות).
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 - מצא כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ עם גרף הפונקציה אם:
 - $k > -\frac{1}{4}$
 - $-\frac{1}{4} < k < -1$

6. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות: 7. $y = \frac{x^2+4x+3}{1-x^2}$ 8. $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$ מצא:

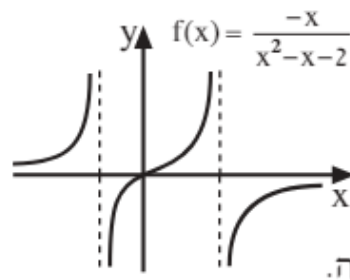
- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות מאונכות לצירים. (שים לב לנקודת אי רציפות סליקה – "חור")
- שרטוט גרף הפונקציה.

פתרונות לשאלות החקירה- פונקציה רציונאלית:

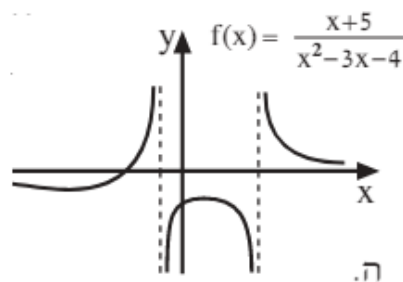
- 4) א. $x \neq 0, x \neq 3$. ב. $(2, -4)$ מקסימום, $(6, -1\frac{1}{3})$ מינימום. ג. עולה: $x < 0$ או $0 < x < 2$ או $x > 6$, יורדת: $2 < x < 3$ או $3 < x < 6$. ד. $(\sqrt{12}, 0), (-\sqrt{12}, 0)$. ה. $x = 0, x = 3, y = -1$. ו. $(4, -1)$. ז. $x = 0, x = 3, y = 0$.



- 2) א. 9. ב. $x \neq 3$. ג. $(-3, -1)$ מינימום. ד. $x = 3, y = 0$. ו. חיובית: $x > 0$, שלילית: $x < 0$. ז. $x = 3, y = 0$.

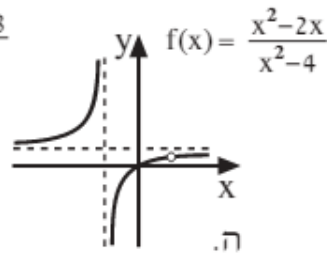
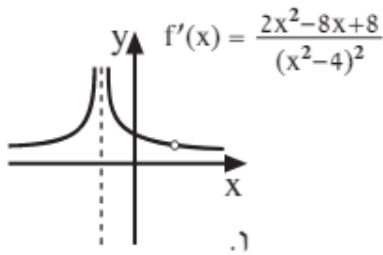


- 3) א. $-2; x \neq -1, x \neq 2$. ג. עולה: $x < -1$ או $-1 < x < 2$, או $x > 2$. ד. $x = -1, x = 2, y = 0$. ו. חיובית: $x < -1$ או $0 < x < 2$, שלילית: $-1 < x < 0$ או $x > 2$.



- 4) א. $a = -3, b = 5$; $x \neq -1, x \neq 4$ (הפתרון). ב. $a = 3, b = -1$ לא ייתכן. ג. $(1, -1)$ מקסימום, $(-11, -0.04)$ מינימום; עולה: $-11 < x < -1$

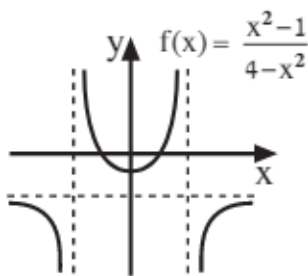
- או $-1 < x < 1$, יורדת: $x < -11$ או $1 < x < 4$ או $x > 4$. ג. $x = -1, x = 4, y = 0$. ד. $(0, -5/4), (-5, 0)$. ו. חיובית: $-5 < x < -1$ או $x > 4$, שלילית: $x < -5$ או $-1 < x < 4$.



5. א. -2.

ב. $x \neq -2, x \neq 2$.

ג. $y = 1, x = -2$.



6. א. $a = 1, b = 4$. ב. תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$. חיתוך עם

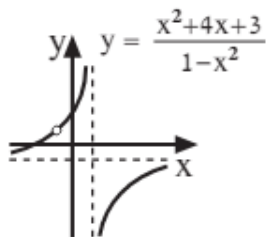
הצירים: $(0, -\frac{1}{4}), (-1, 0), (1, 0)$. נקודות קיצון: $(0, -\frac{1}{4})$

מינימום. עולה: $0 < x < 2$ או $x > 2$, יורדת: $-2 < x < 2$ או

$x < -2$. אסימפטוטות אנכיות: $x = 2, x = -2$. ד. חיובית:

$-1 < x < 1$ או $-2 < x < -1$ או $1 < x < 2$, שלילית: $x < -2$ או $-1 < x < 1$

או $x > 2$. ה. (1) שתיים. (2) אף נקודה.

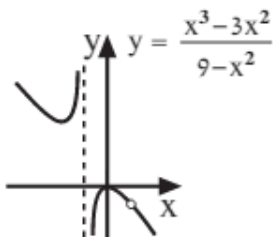


7. א. $x \neq 1, x \neq -1$. ב. אין.

ג. עולה: $x > 1$ או $-1 < x < 1$

או $x < -1$. ד. $(-3, 0), (0, 3)$.

ה. $y = -1, x = 1$.



8. א. $x \neq 3, x \neq -3$. ב. $(0, 0)$ מקסימום,

$(-6, 12)$ מינימום. ג. עולה: $-3 < x < 0$ או

$-6 < x < -3$, יורדת: $x < -6$ או $0 < x < 3$

או $x > 3$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = -3$.

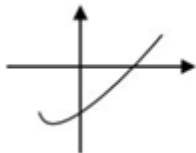
ענו על התרגילים הבאים – חקירה מלאה של פונקציה עם שורשים (להגשה בקלסר חצי שקוף)

1. המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x - a \cdot \sqrt{x+8}$ בנקודה בה $x = -4$ מאונך לישר $y + 2x = 0$.
 א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. ערכו של הפרמטר a ותחום ההגדרה.
 2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 3. תחומי העלייה והירידה.
 4. נקודות החיתוך עם הצירים.
 ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

2. נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x) = x \cdot \sqrt{p-x}$ נמצאת על האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2}{x-4}$.
 א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. ערכו של הפרמטר p ותחום ההגדרה.
 2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
 3. תחומי העלייה והירידה.
 4. נקודות החיתוך עם הצירים.
 ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

3. נתונות הפונקציות $f(x) = x \cdot \sqrt{12-x}$ ו $g(x) = p \cdot \sqrt{-x^2 + 16x - 63}$.
 א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.
 ב. נתון שלשתי הפונקציות יש אותה נקודת קיצון פנימית. מצא את ערכו של הפרמטר p .
 ג. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם שלוש נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

תשובות



1. א. 1. $a = 2$, תחום ההגדרה: $-8 \leq x$. 2. פנימית: $\min(-7, -9)$.
 קצה: $\max(-8, -8)$. 3. עולה: $-7 < x$; יורדת: $-8 < x < -7$.
 4. $(0, -5.66), (8, 0)$. ב. השרטוט משמאל. ג. $8 \leq m < 9$.

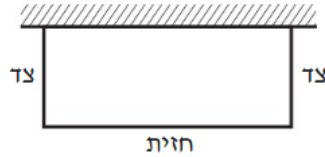


2. א. 1. $p = 6$, תחום ההגדרה: $x \leq 6$. 2. פנימית: $\max(4, 5.66)$. קצה: $\min(6, 0)$.
 3. עולה: $x < 4$; יורדת: $4 < x < 6$. 4. $(6, 0), (0, 0)$.
 ב. השרטוט משמאל. ג. $y = -5.66$.

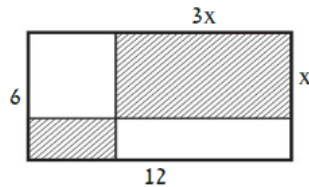
3. א. $f(x) : x \leq 12$; $g(x) : 7 \leq x \leq 9$. ב. $p = 16$. ג. 16 יח"ר.

ענו על התרגילים הבאים – בעיות קיצון (להגשה בקלסר חצי שקוף)

מצא שני מספרים חיוביים שסכומם a ומכפלת מספר אחד בריבוע של השני היא מקסימלית.



- יש להקיף בגדר חלקה בצורת מלבן – בחזית ומשני הצדדים שלה. אורך הגדר 40 מ'.
א. חשב מה צריך להיות אורך חזית החלקה כדי ששטחה יהיה מקסימלי.
ב. מצא את השטח המקסימלי.



- בתוך מלבן שאורכו 12 ס"מ ורוחבו 6 ס"מ חסומים שני מלבנים מקווקווים. אורך אחד המלבנים המקווקווים הוא $3x$ ורוחבו x .
א. בטא בעזרת x את סכום השטחים של שני המלבנים המקווקווים.
ב. מצא מה צריך להיות הערך של x כדי שסכום השטחים של שני המלבנים המקווקווים יהיה מינימלי.
ג. מצא את סכום השטחים המינימלי.

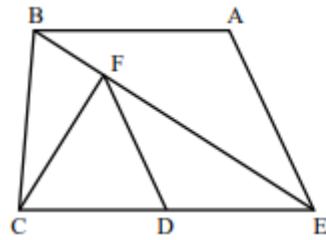
השאלות

1. $\frac{2}{3}a, \frac{a}{3}$

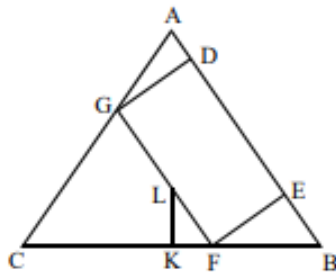
2. א. 20 מ'. ב. 200 מ"ר.

3. א. $6x^2 - 30x + 72$. ב. 2.5 ס"מ. ג. 34.5 סמ"ר.

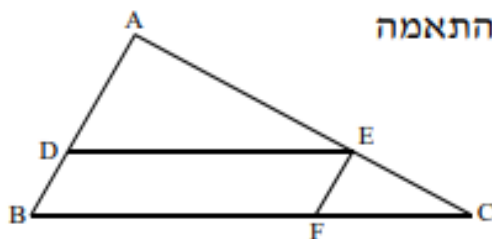
פתרו: גאומטריה מתוך בחינות בגרות (להגשה בקלסר חצי שקוף)



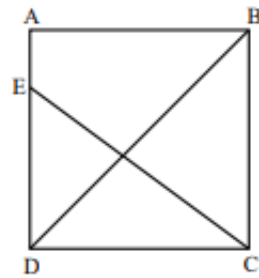
1. נתון טרפז $ABCE$ ($AB \parallel EC$).
 הנקודה F נמצאת על האלכסון BE
 כך ש- $CF \perp BE$.
 הנקודה D היא אמצע הבסיס CE
 (ראה ציור).
 נתון: $ED = 3a$, $EA = 4a$, $\angle CEB = \angle AEB$.
 א. הוכח כי $\triangle EAB \sim \triangle EDF$.
 ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S .
 הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .
 ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G .
 הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .



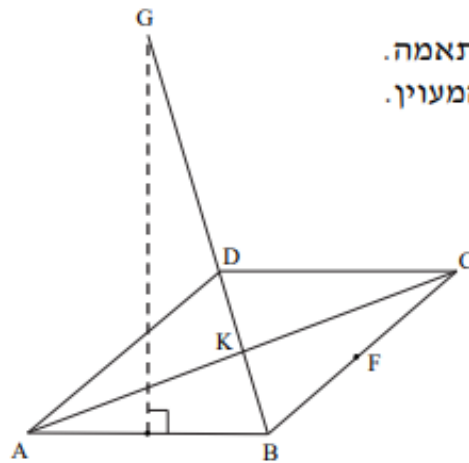
2. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AC = AB$)
 חסום מלבן $GFED$ כך שהקדקודים D ו- E
 מונחים על הצלע AB , והקדקודים F ו- G
 מונחים על הצלעות BC ו- CA בהתאמה.
 נקודה L , הנמצאת על צלע המלבן GF ,
 היא מפגש התיכונים במשולש ABC .
 דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC ,
 החותך את BC בנקודה K (ראה ציור).
 א. הוכח: $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$.
 אם נתון: $BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ,
 חשב:
 ב. את אורך הקטע KF . נמק.
 ג. את אורך הקטע FE . נמק.



3. נתון משולש ABC . הנקודות D , E , ו- F
 נמצאות על הצלעות AB , AC , ו- BC בהתאמה
 כך ש- $DE \parallel BC$ ו- $FE \parallel BA$ (ראה ציור).
 א. נתון: שטח המשולש ADE הוא S_1 ,
 שטח המשולש EFC הוא S_2 .
 הבע באמצעות S_1 ו- S_2
 את היחס $\frac{BF}{FC}$. נמק.
 ב. הוכח כי שטח המשולש BEF שווה ל-
 $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.



4. בריבוע ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD (ראה ציור). מעגל העובר דרך הנקודות E, D ו-C חותך את האלכסון BD בנקודה M, ואת הצלע BC בנקודה N. הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B ובין נקודת החיתוך של CE עם BD. א. הוכח כי $CD = EN$. ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארוך ממנו או שווה לו? נמק. ג. הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$.



5. ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי צלעות AB ו-BC בהתאמה. הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין. מן הנקודה E העלו אנך ל-AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור). א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

- הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC. ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC ו-BFG דומים זה לזה.

- נסמן ב-R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC, וב-r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

- (2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.

הערות

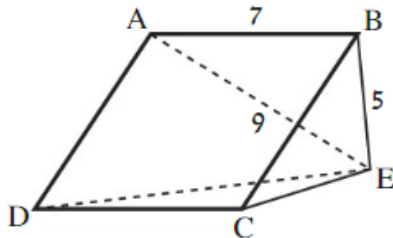
1. א. ב. $\frac{9}{8}S$. ג. $\frac{1}{16}S$.

2. א. ב. 3.

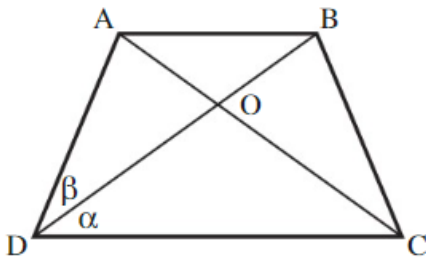
3. א. $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$.

4. ב. DM קצר מ-CE.

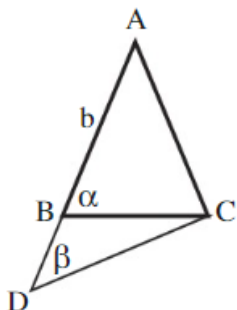
ענו על התרגילים הבאים – טריגונומטריה במישור (להגשה בקלסר חצי שקוף)



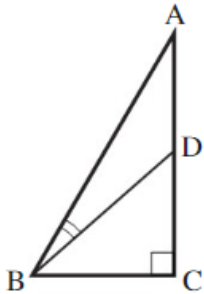
1. על הצלע BC של מעוין ABCD בנו
 (כלפי חוץ) משולש שווה שוקיים BCE
 שבו $BE = CE$. נתון: $AB = 7$ ס"מ, $BE = 5$ ס"מ, $AE = 9$ ס"מ.
 חשב את DE.



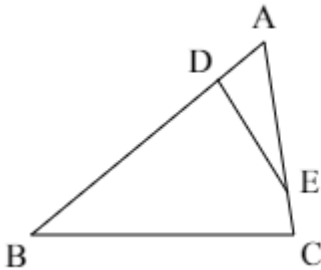
2. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$)
 שווה האלכסון BD ל- k והוא יוצר זווית α
 עם הבסיס הגדול DC וזווית β עם השוק AD.
 האלכסונים נפגשים בנקודה O.
 א. הבע באמצעות k , α ו- β את שטח המשולש AOD.
 ב. הבע את שטח הטרפז והוכח שהוא אינו תלוי ב- β .
 ג. חשב פי כמה גדול שטח הטרפז משטח המשולש AOD אם נתון $\alpha = 30^\circ$ ו- $AD = AB$.



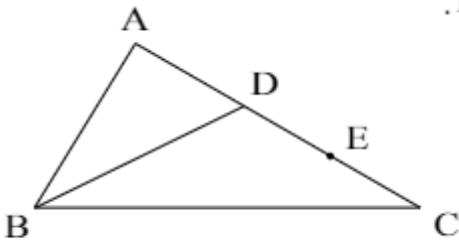
3. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$)
 האריכו את השוק AB מהצד של B עד לנקודה D.
 נתון: $AB = b$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.
 א. הבע את BD באמצעות b , α ו- β .
 ב. הבע באמצעות b את שטח המשולש BDC
 אם נתון שהמשולש ABC הוא שווה צלעות
 והמשולש BDC הוא שווה שוקיים.
 ג. הוכח שבנתונים של סעיף ב' מתקיים: $S_{ABC} = S_{BDC}$.



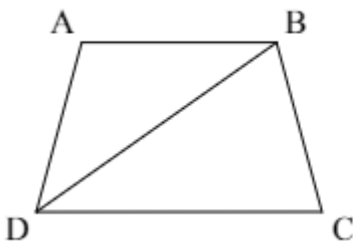
4. BD הוא התיכון לניצב AC במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$).
נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BD = 7.5$ ס"מ.
א. חשב את הזווית ABD.
ב. חשב את הניצב AC.
ג. חשב את הזווית DBC.



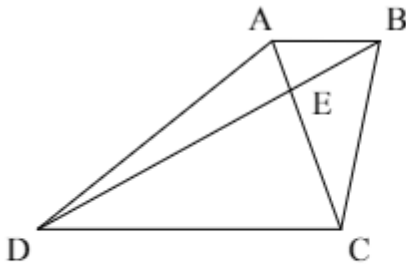
5. הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט.
נתון: $AE = 8a$, $CE = 2a$, $BC = 14a$, $AD = 3a$, $BD = 13a$.
א. הבע באמצעות a את אורך הקטע DE.
ב. נתון: היקף המשולש $\triangle ADE$ הוא 36 ס"מ.
חשב את שטח המשולש $\triangle BDE$.



6. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $AC = 14$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $BC = 18$ ס"מ.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle BAC$.
ב. נתון שהישר BD הוא חוצה זווית במשולש. חשב את הזווית הקהה $\sphericalangle BDC$.
ג. חשב את אורך הקטע BD.
ד. נתון: הנקודה E היא אמצע CD. חשב את שטח המשולש $\triangle ABE$.



7. בטרפז ABCD הבסיס התחתון CD שווה באורכו לאלכסון BD.
נסמן: $AB = p$, $\sphericalangle ADB = \alpha$, $\sphericalangle BAD = 3\alpha$.
א. הבע באמצעות p ו- α את אורך השוק BC.
ב. נתון: הטרפז שווה שוקיים. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{ABCD}}$.



8. בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) האלכסון AC חוצה את

הזווית $\angle BAD$. האלכסונים נחתכים בנקודה E.

נסמן: $\angle ABD = 3\alpha$, $\angle ADB = \alpha$, $AD = b$.

א. הבע באמצעות α את היחס: $\frac{AB}{CD}$.

ב. נתון: שטח המשולש $\triangle ACD$ הוא: $\frac{b^2}{4}$.

מצא את α ($\alpha < 10^\circ$) וחשב את היחס: $\frac{AB}{CD}$.

תשובות:

1. 11.99 ס"מ.

2. א. $\frac{k^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin(2\alpha + \beta)}{2 \sin^2(\alpha + \beta) \sin 2\alpha}$ ב. $\frac{k^2}{2} \sin 2\alpha$ ג. 4.5

3. א. $\frac{2b \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta}$ ב. $\frac{b^2}{2} \sin 120^\circ$

4. א. 18.19° ב. 10.82 ס"מ. ג. 46.15°

5. א. 95.74° ב. 121.1° ג. 11.62 ס"מ. ד. 47.26 סמ"ר.

6. א. $DE = 7a$ ב. 180.13 סמ"ר.

7. א. $\frac{2p \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ ב. 0.62

8. א. $\frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. 7.5° . היחס: 0.34