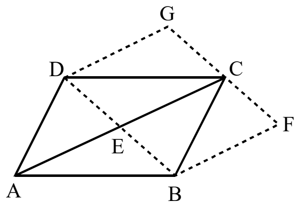
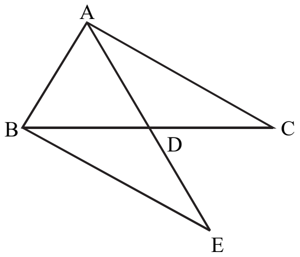
עבודת קיץ – גיאומטריה (4 יחידות)

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

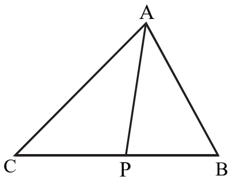
1. המרובעים ABCD ו- BFGD הם מקביליות.
נתון: $CG = CF$ (C על הקטע GF).
א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.
ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין,
אז המרובע ECGD הוא מלבן.



2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC
של משולש ABC, כך ש- $\sphericalangle ADB < 90^\circ$.
נקודה E נמצאת על המשך הקטע AD
כך שמתקיים $AD = DE$, $AC = BE$.
א. הוכח: AD תיכון ל- BC במשולש ABC.
ב. הוכח: $S_{ABD} = S_{BDE}$.

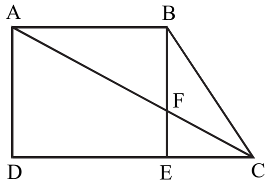


3. בציור שלפניך נתון: $AC = 15$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ,
$PB = 8$ ס"מ, $CP = 10$ ס"מ.
א. הוכח: AP חוצה את הזווית BAC.
ב. הוכח: $\Delta ABP \sim \Delta CBA$.
ג. חשב את אורך הקטע AP.



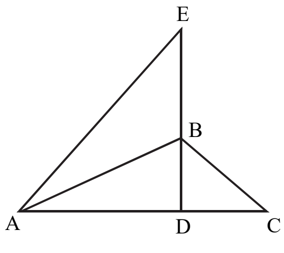
תשובה: ג. 10 ס"מ.

4. לפניך טרפז ישר-זווית ABCD ($AB \parallel DC$, $\sphericalangle ADC = 90^\circ$).
BE הוא הגובה לבסיס DC.
האלכסון AC חוצה את הזווית BCD,
וחותך את הגובה BE בנקודה F.
נתון: $S_{EFC} = 4$ סמ"ר, $\frac{BC}{EC} = 2$.
א. חשב את שטח המשולש ABF.
ב. חשב את שטח המלבן ABED.

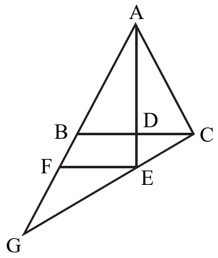


תשובה: א. 16 סמ"ר. ב. 48 סמ"ר.

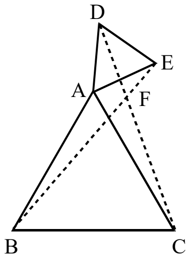
5. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD.
נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD,
כך ש- AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BCA = 2 \cdot \sphericalangle BAC$.
א. הוכח: $BC \cdot ED = BD \cdot EA$.
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א',
והוכח: $BC \cdot ED = AD \cdot BE$.



6. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.
נתון: $\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{BF}$. הוכח: $AE \perp BC$.

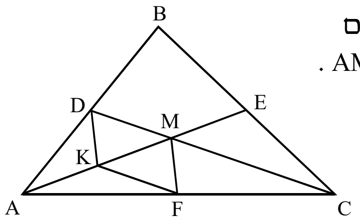


7. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.
א. הוכח: $BE = CD$.
ב. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE$.
ג. חשב את הזווית BFC.

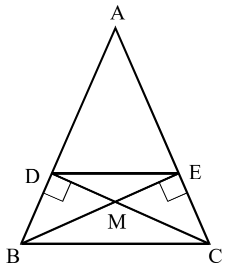


תשובה: ג. 60°.

8. התיכונים AE ו- CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM.
F היא נקודה על הצלע AC כך ש- $KF \parallel DC$ (ראה ציור).
א. הוכח: $2KF = MC$.
ב. הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.

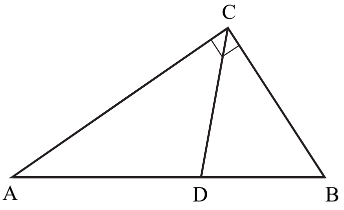


9. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
BE ו- CD הם גבהים לשוקיים.
M היא נקודת המפגש בין הגבהים.
א. (1) הוכח כי $BD = EC$.
(2) הוכח כי $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.
מצא את היחס $\frac{DM}{MC}$.



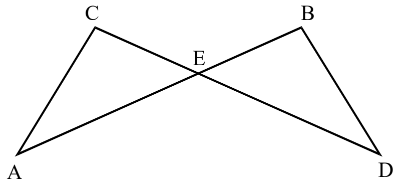
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.

10. במשולש ישר-זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$
CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).
א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.
(2) נתון: $BC = 21$ מ״מ, $AC = 28$ מ״מ.
חשב את האורך של הקטע DB.
ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB.
האנך חותך את היתר
בנקודה N. הוכח כי $\frac{BC}{AB} = \frac{CN}{AC}$.
ג. חשב את האורך של הקטע DN.



תשובה: א. (2) 15 מ״מ. ג. 2.4 מ״מ.

11. הקטעים AB ו- CD נחתכים בנקודה E . נתון : $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.



א. הוכח כי $\Delta AEC \sim \Delta DEB$.

ב. הוכח כי $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

ג. נתון גם : $CB \parallel AD$.

הוכח : $\Delta AEC \cong \Delta DEB$

ד. נתון גם : $AC \perp CE$, $\frac{AD}{CB} = \frac{5}{3}$,

3 ס״מ = CE .

(1) חשב את האורך של ED .

(2) חשב את האורך של AC .

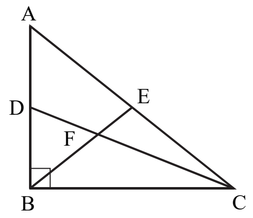
תשובה: ד.(1) 5 ס״מ. (2) 4 ס״מ.

12. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית

($\sphericalangle ABC = 90^\circ$). BE הוא תיכון לצלע AC ,

ו- CD הוא תיכון לצלע AB .

התיכונים BE ו- CD נחתכים בנקודה F .



א. חשב את היחס $\frac{FB}{AC}$.

ב. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC

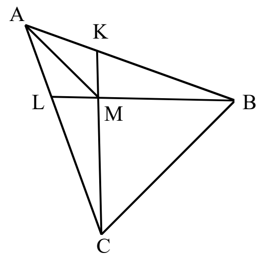
להיקף המשולש EFD .

ג. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC , והנקודה N היא אמצע

הקטע FB . הוכח כי המרובע DEMN הוא מקבילית.

תשובה: א. $\frac{1}{3}$. ב. 2 .

13. במשולש ABC נתון : $AK = AL$, $AB = AC$.



M היא נקודת המפגש בין הקטעים CK ו- BL .

א. הוכח : (1) $LB = KC$.

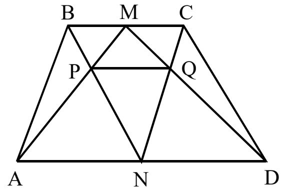
(2) $MK = ML$.

(3) $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAB$.

ב. נתון : $\frac{CM}{MK} = \frac{7}{3}$. מצא את היחס $\frac{AB}{AL}$.

תשובה: ב. $\frac{7}{3}$.

14. בטרפז ABCD $(BC \parallel AD)$ הנקודות M ו- N



הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו- DM

נחתכים בנקודה Q , הקטעים AM ו- BN

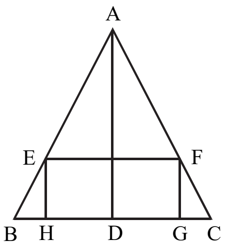
נחתכים בנקודה P (ראה ציור).

א. הוכח : $PQ \parallel AD$.

ב. נתון גם : $BC = a$, $AD = 2a$.

הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ .

תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.



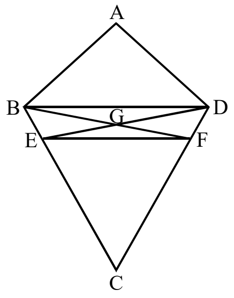
15. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
חסום מלבן $EFGH$, כך שהאלכסון HF
מאונך לשוק AC. AD הוא תיכון
לבסיס BC. נתון: $AD = BC$.

א. הוכח: $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$.

ב. הוכח: $\Delta HGF \sim \Delta FGC$.

ג. נתון: $HG = 10$ ס״מ. מצא את GC.

תשובה: ג. 2.5 ס״מ.

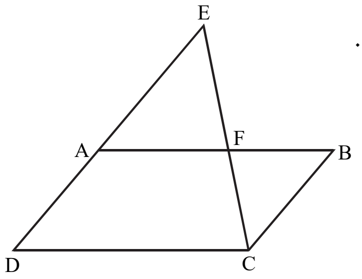


16. $ABCD$ הוא דלתון שבו $AB = AD$ ו- $BC = DC$.
E נקודה על הצלע BC, ו- F נקודה על הצלע DC
כך ש- DE חוצה את הזווית ADC, ו- BF חוצה
את הזווית ABC. BF ו- DE נפגשים בנקודה G
(ראה ציור).

א. הוכח: (1) $GB = GD$.

(2) $\Delta BGE \cong \Delta DGF$.

ב. הוכח כי המרובע $DBEF$ הוא טרפז שווה-שוקיים.



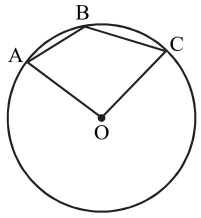
17. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית (ראה ציור).

א. הוכח: $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{AD}{AE}$

(2) היעזר בסעיף א׳ ובתת סעיף ב׳ (1),
והוכח: $S_{\Delta ADF} = S_{\Delta BEF}$.

בעיות עם מעגל (כולל פרופורציה ודמיון)

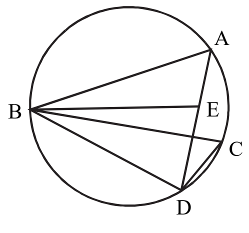


1. הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל
שמרכזו בנקודה O. נתון: $\sphericalangle AOC = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את הזווית ABC.

ב. נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$. מצא את α.

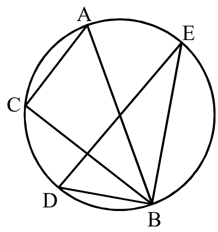
תשובה: א. $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. ב. 120°.



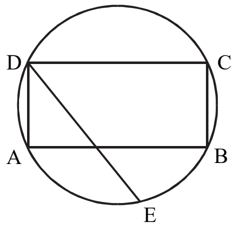
2. A, B, C ו- D הן נקודות על מעגל,
כמתואר בציור. E היא נקודה על AD,
כך ש- $AE = DC$. נתון: $AB = BC$.

א. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta CBD$.

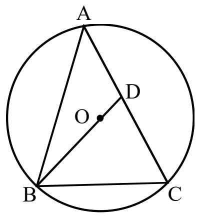
ב. המשך הקטע BE חותך את המעגל
בנקודה M. הוכח: $AM = DC$.



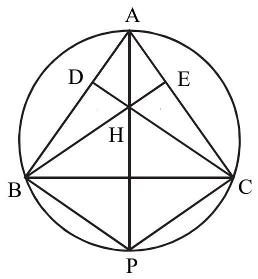
.3 AB הוא קוטר של מעגל.
הנקודות C , D ו- E נמצאות
על המעגל כך ש- $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC}$.
הוכח : $DE \perp BC$.



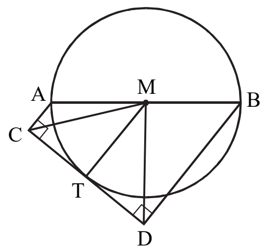
.4 מלבן ABCD חסום במעגל.
הנקודה E נמצאת על הקשת AB
כך ש- $DE = DC$ (ראה ציור).
א. הוכח : $EB = BC$.
ב. הוכח : $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBA$.



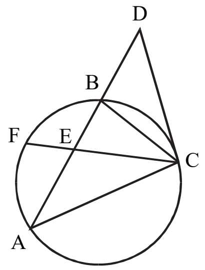
.5 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו
בנקודה O . נתון : $\sphericalangle ACB = 68^\circ$.
המשך הרדיוס OB חותך את AC
בנקודה D . חשב את הזווית ABD .



.6 המשולש ABC חסום במעגל. AP הוא קוטר
במעגל. BE הוא גובה לצלע AC ו- CD
הוא גובה לצלע AB . BE ו- CD נחתכים
בנקודה H שעל הקוטר AP .
א. הוכח : $DC \parallel BP$.
ב. הוכח שהמרובע BHCP הוא מעוין.

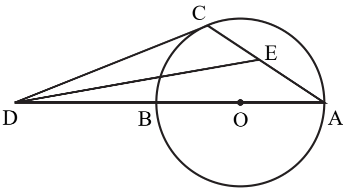


.7 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M .
הישר CD משיק למעגל בנקודה T .
נתון : $BD \perp CD$, $AC \perp CD$.
א. הוכח : $TM = \frac{AC + BD}{2}$.
ב. הוכח : $MC = MD$.

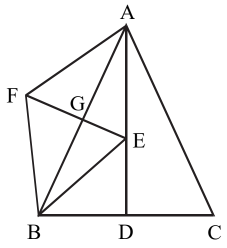


.8 המשולש ABC חסום במעגל. המשיק
למעגל בנקודה C והמשך המיתר AB
נפגשים בנקודה D . E היא נקודה
על המיתר AB . נתון : $DC = DE$.
הוכח : $AF = BF$.

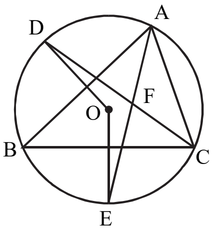
9. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
המשיק למעגל בנקודה C חותך
את המשך הקוטר AB בנקודה D.
E נקודה על המיתר AC כך ש- DE
חוצה את הזווית ADC.
הוכח: $\sphericalangle DEC = 45^\circ$.



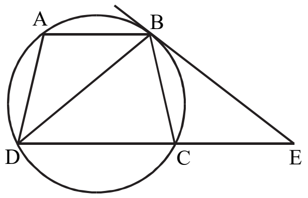
10. AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים
ABC $(AB = AC)$. E היא נקודה על AD כך
שהמרובע $AEBF$ הוא דלתון $(AE = BE \ , \ AF = BF)$.
א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל
החוסם את המשולש ABC.
ב. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל
החוסם את המשולש ABD.



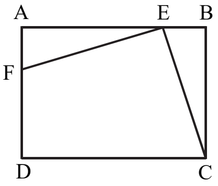
11. במעגל שמרכזו בנקודה O נתון:
הרדיוס OD מאונך למיתר AB
והרדיוס OE מאונך למיתר BC.
הוכח: הנקודה F היא מרכז המעגל
החסום בתוך המשולש ABC.



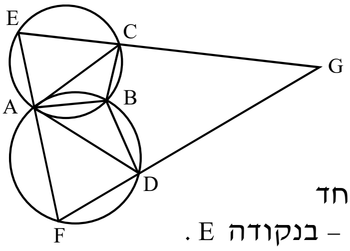
12. טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ חסום במעגל
כך שהבסיס הקטן AB שווה לשוק AD.
E היא נקודה על המשך הבסיס DC
כך ש- BE משיק למעגל.
א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBE$.
ב. הוכח: $AB = CE$.



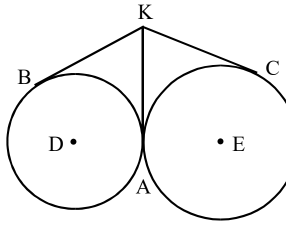
13. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- AD
של מלבן $ABCD$. נתון: $AF = BE \ , \ AE = BC$.
א. הוכח: $\sphericalangle AEF = \sphericalangle BCE$.
ב. הוכח: המעגל העובר דרך הנקודות
C, D ו- F עובר גם דרך הנקודה E.
ג. הוכח: $\sphericalangle FCE = \sphericalangle FDE$.



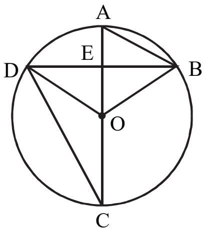
14. שני מעגלים לא שווים חותכים את זה בנקודות A ו- B.
המשיק לאחד המעגלים בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה C.
המשיק למעגל האחר בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה D.
א. הוכח: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.
ב. ישר העובר דרך הנקודה A חותך את אחד
המעגלים בנקודה F ואת המעגל האחר – בנקודה E.
הישרים EC ו- FD נפגשים בנקודה G.
הוכח: המשולש EFG הוא שווה-שוקיים.



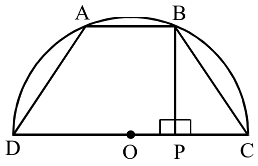
15. המעגלים D ו- E משיקים זה לזה בנקודה A .
הקטע BK משיק למעגל D .
הקטע CK משיק למעגל E .
הקטע AK משיק לשני המעגלים.
א. הוכח : $BK = CK$.
ב. הוכח : הנקודה A נמצאת על הקטע DE .



16. AC הוא קוטר ו- BD הוא מיתר
במעגל שמרכזו O .
נתון : $BD \perp AC$.
א. הוכח : $S_{ABO} = S_{DOC}$.
ב. הוכח : $S_{ABOD} = S_{ADC}$.

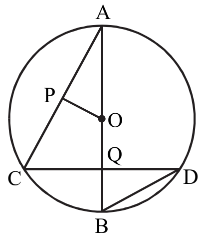


17. בחצי עיגול שקוטרו 18 ס"מ חוסמים
טרפז שווה-שוקיים ABCD .
BP הוא אנך לקוטר CD .
O – מרכז המעגל. נתון : 10 ס"מ $= BC$.
א. חשב את אורך הקטע OP .
ב. חשב את שטח הטרפז.

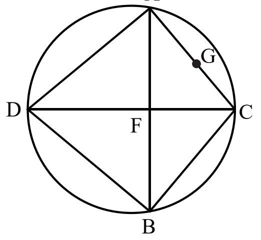


תשובה: א. $3\frac{4}{9}$ ס"מ. ב. 103.47 סמ"ר.

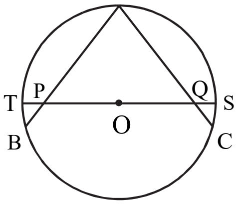
18. AB הוא קוטר במעגל O .
AC ו- CD הם מיתרים שווים במעגל.
נתון : P אמצע המיתר AC ,
Q אמצע המיתר CD .
א. הוכח : $\Delta APO \cong \Delta DQB$.
ב. הוכח : $OQ = BQ$.



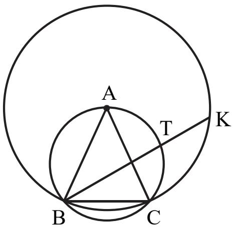
19. A , B , C ו- D הן נקודות על מעגל.
המיתרים AB ו- CD נחתכים בנקודה F
(ראה ציור). נתון : $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$.
א. הוכח כי DC הוא קוטר.
ב. נתון גם : $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$.
הוכח : $AB \perp CD$.
ג. נקודה G נמצאת על AC כך ש- $GF = AG$.
הוכח : $GF = GC$.



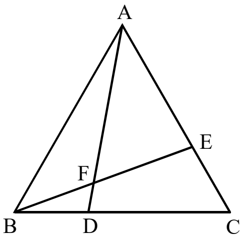
20. AB ו- AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .
הקוטר TS חותך את המיתרים AB ו- AC
בנקודות P ו- Q בהתאמה.
נתון : $AP = AQ$, $OP = OQ$.
הוכח : $AB = AC$.



21. המשולש ABC חסום במעגל. מקדקוד A חגו מעגל נוסף, שבו A הוא מרכז המעגל, והנקודות B ו- C נמצאות על המעגל.
ישר העובר דרך B חותך את המעגל החוסם בנקודה T, ואת המעגל האחר בנקודה K.
א. הוכח: $\sphericalangle BTC = 2\sphericalangle BKC$.
ב. הוכח: $TC = TK$.

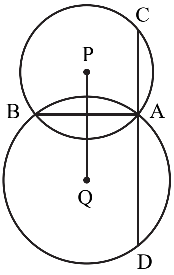


22. המשולש ABC הוא שווה-צלעות. הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$.
א. הוכח: $\Delta ACD \cong \Delta BAE$.
ב. חשב את הזווית DFE.
ג. הוכח שהמרובע CDFE בר-חסימה במעגל.
ד. הוכח: $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEC$.

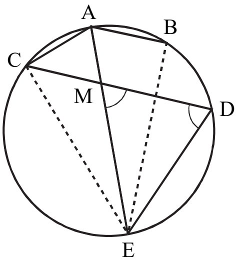


תשובה: ב. 120°.

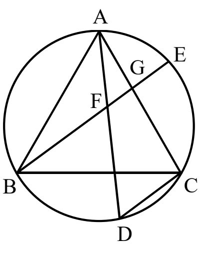
23. א. **הוכח את המשפט:** קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים – חוצה את המיתר המשותף לשני המעגלים ומאונך לו.
ב. בציור מתוארים מעגלים P ו- Q הנחתכים בנקודות A ו- B. דרך A מעבירים ישר החותך את המעגלים P ו- Q בנקודות C ו- D, בהתאמה.
נתון: $DC \parallel PQ$. הוכח: BC ו- BD הם קטרים במעגלים P ו- Q.



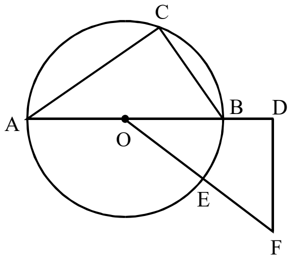
24. הנקודות A, B, C, D, E נמצאות על מעגל (ראה ציור).
נתון: $AB \parallel CD$,
הקשתות CA ו- AB שוות,
AE הוא קוטר במעגל,
החותך את המיתר CD בנקודה M.
א. הוכח כי $\sphericalangle EMD = \sphericalangle MDE$.
ב. הוכח כי המרובע ABMC הוא מעוין.



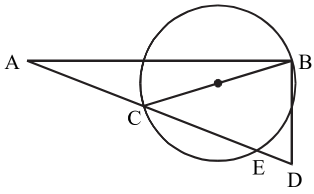
25. ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.
D היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{BC}$, ו- E היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{AC}$ כך ש- DC מקביל ל- BE.
BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.
א. הוכח: $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.
ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.
ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD.



.26 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O .
AB הוא קוטר במעגל.
נתון: $\overset{\frown}{BC} = 2 \cdot \overset{\frown}{BE}$, $OD \perp DF$.
א. הוכח: $\Delta ACB \sim \Delta ODF$.
ב. נתון: $BC =$ 6 ס״מ , $AC =$ 8 ס״מ ,
$AD =$ 13 ס״מ . הוכח: $\Delta ACB \cong \Delta ODF$.

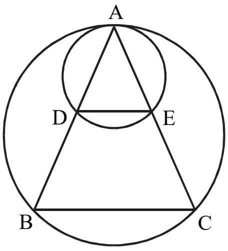


.27 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\measuredangle ABD = 90^\circ)$.
הצלע BC היא קוטר במעגל.
א. הוכח: $\Delta BDE \sim \Delta ADB$.
ב. נתון: $BD = a$, $AB = d$. הבע את אורך
הקטע ED באמצעות a ו- d .



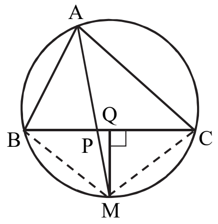
תשובה: ב. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}$.

.28 שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A .
AB ו- AC הם מיתרים במעגל הגדול החותכים
את המעגל הקטן בנקודות D ו- E .
א. הוכח: $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $BC = 2.5DE$, $BD =$ 6 ס״מ .
חשב את אורך הקטע AD .



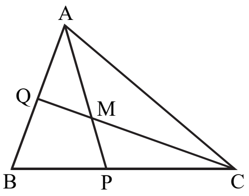
תשובה: ב. 4 ס״מ.

.29 המשולש ABC חסום במעגל.
נתון: $MQ \perp BC$, $BM = MC$, $AB =$ 20 ס״מ ,
$AC =$ 25 ס״מ , $BC =$ 36 ס״מ .
א. חשב את אורך הקטע PQ .
ב. נתון: $S_{BPM} =$ 96 סמ״ר . חשב את S_{CPM} .

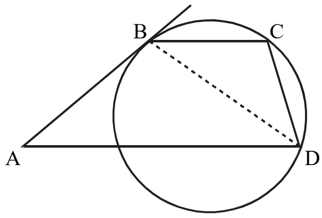


תשובה: א. 2 ס״מ. ב. 120 סמ״ר.

.30 בציור שלפניך נתון: $AC =$ 40 ס״מ ,
$PC =$ 20 ס״מ , $BP =$ 15 ס״מ ,
$BQ =$ 14 ס״מ , $AQ =$ 16 ס״מ .
הוכח כי הנקודה M היא מרכז
המעגל החסום במשולש ABC .

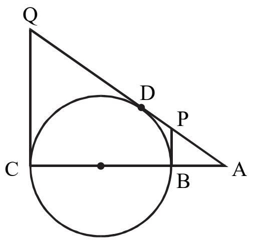


31. המרובע ABCD הוא טרפז ($BC \parallel AD$).
הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B.
א. הוכח כי: $\Delta ABD \sim \Delta DCB$.
ב. נתון: $BC = 5$ ס״מ, $BD = 8$ ס״מ,
$S_{ABD} = 32$ סמ״ר. חשב את S_{BDC}.



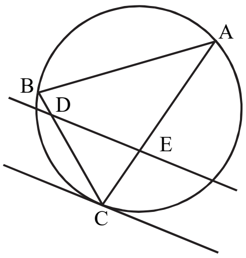
תשובה: ב. 12.5 סמ״ר.

32. CB הוא קוטר של מעגל. CQ משיק למעגל
בנקודה C, AQ משיק למעגל בנקודה D
ו- BP משיק למעגל בנקודה B.
נתון: $AP = 10$ ס״מ, $AQ = 40$ ס״מ.
חשב את רדיוס המעגל.



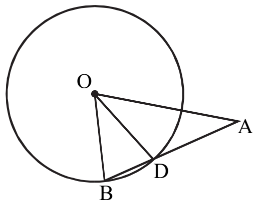
תשובה: 12 ס״מ.

33. המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה
על צלע AC. דרך הנקודה E העבירו
מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C.
א. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.
ב. נתון: $BD = 2$ ס״מ, $DC = 6$ ס״מ, $AE = 2EC$,
שטח המשולש ABC הוא S.
הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC.



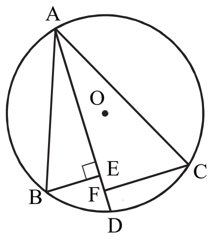
תשובה: $\frac{1}{4}S$.

34. המשולש ABO הוא שווה שוקיים ($AB = AO$).
הנקודה O היא מרכז המעגל.
א. הוכח: $\Delta BOD \sim \Delta BAO$
ב. נתון: $OD = 12$ ס״מ, $AD = 10$ ס״מ.
חשב את היחס בין שטח המשולש BOD
לשטח המשולש AOD.

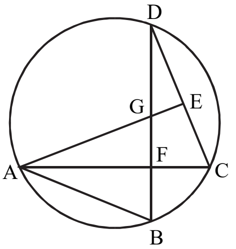


תשובה: ב. $4:5$.

35. הנקודות A, B ו- C מונחות על מעגל שמרכזו O.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC (הקטנה)
הנקודה A מונחת על הקשת BC (הגדולה).
נתון: $CF \perp AD$, $BE \perp AD$.
הנקודה E מונחת בין הנקודות A ו- F.
א. הוכח: $\Delta ABE \sim \Delta ACF$.
ב. הוכח: $BE < CF$.



.36 A , B , C ו- D הן נקודות על מעגל. AC ו- BD נחתכים בנקודה F. G היא נקודה על BD כך ש- $AG = AB$. המשך AG חותך את DC בנקודה E. נתון: $BF = GF$.

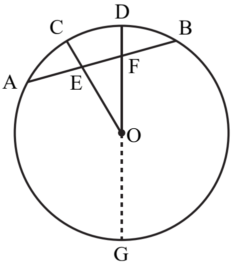


א. הוכח: $\Delta AEC \sim \Delta DFC$.

ב. נתון: $EC = a$, $DF = c$, $AE = m$.
הבע את שטח המשולש DFC באמצעות a , c ו- m.

תשובה: ב. $\frac{ac^2}{2m}$.

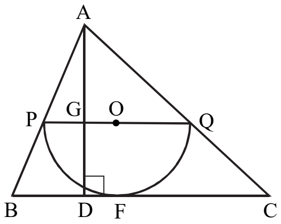
.37 AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הנקודות C ו- D נמצאות על הקשת $\overset{\frown}{AB}$ כך ש- $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$. OC ו- OD חותכים את AB בנקודות E ו- F בהתאמה (ראה ציור).



א. הוכח כי $\Delta AEO \cong \Delta BFO$

ב. (1) נמק מדוע $\frac{AE}{FE} = \frac{AO}{FO}$. (2) הוכח כי $\frac{AE}{FE} > 1$.

.38 במשולש ABC חסום חצי מעגל שמרכזו O. F – נקודת השקה. הקוטר PQ של חצי המעגל מקביל לצלע BC. AD הוא הגובה לצלע BC. נתון: 20 ס"מ $= BC$, 15 ס"מ $= AD$.

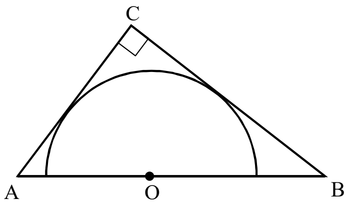


א. הוכח: $\frac{AG}{AD} = \frac{PQ}{BC}$.

ב. חשב את רדיוס חצי המעגל.

תשובה: ב. 6 ס"מ.

.39 במשולש ישר זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$ חסום חצי מעגל שמרכזו O. קוטר המעגל מונח על היתר של המשולש.



א. הוכח כי הקטע CO, המחבר את מרכז המעגל עם נקודת המוצא C של שני משיקים למעגל (CA ו- CB), חוצה את הזווית שבין שני המשיקים.

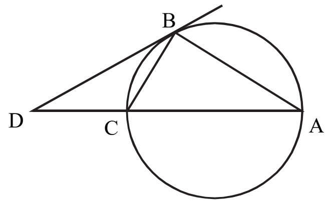
ב. נתון: 6 ס"מ $= AO$, 8 ס"מ $= BO$.

(1) היעזר בסעיף א' וחשב את היחס $\frac{AC}{BC}$.

(2) חשב את אורכי הניצבים AC ו- BC.

תשובה: ב. (1) $\frac{3}{4}$. (2) 8.4 ס"מ, 11.2 ס"מ.

.40 משולש ABC חסום במעגל. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע AC.
DB משיק למעגל (ראה ציור).

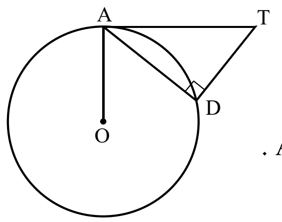


א. הוכח: $\frac{DB}{CD}=\frac{AB}{CB}$.

ב. נתון: AC עובר דרך מרכז המעגל.
$\sphericalangle BAC=30^\circ$, ושטח המשולש BDA
הוא 15 סמ״ר. חשב את שטח המשולש CDB.

תשובה: ב. 5 סמ״ר.

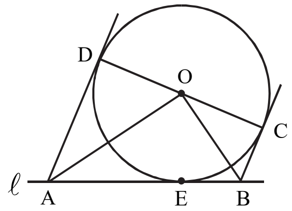
.41 OA הוא רדיוס במעגל, ואורכו 10 ס״מ.
בנקודה A העבירו ישר משיק למעגל.
T היא נקודה על המשיק, ו- D היא נקודה
על המעגל, כך ש- $\sphericalangle ADT=90^\circ$, 9 ס״מ $=$ TD.



א. חשב את המרחק של מרכז המעגל מהמיתר AD.
ב. חשב את אורך הקטע AT.

תשובה: א. 8 ס״מ. ב. 15 ס״מ.

.42 מעגל O שרדיוסו 6 ס״מ משיק לישר ℓ
בנקודה E. CD הוא קוטר במעגל.
BC משיק למעגל בנקודה C
ו- AD משיק למעגל בנקודה D.



נתון: 13 ס״מ $=$ AB, $BE<AE$.
א. הוכח: $\sphericalangle AOB=90^\circ$.
ב. חשב את אורכי הקטעים BE ו- AE.

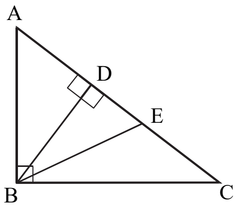
תשובה: ב. 4 ס״מ, 9 ס״מ.

טריגונומטריה במישור (4 יחידות)

הערה: התרגילים כוללים שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר-זווית, ושימוש במשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים.

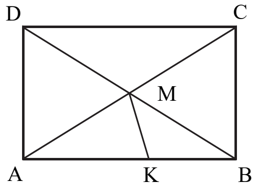
1. במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $\sphericalangle BAC = \alpha$. BD הוא גובה ליתר. BE הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle DBC$. הבע את אורך הקטע EC באמצעות α.

תשובה: $6\sin\alpha(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{2})$.



2. במלבן $ABCD$ נתון: $AB = 8.4$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ, $AM = AK$. חשב את אורך הקטע MK.

תשובה: 2.828 ס"מ.

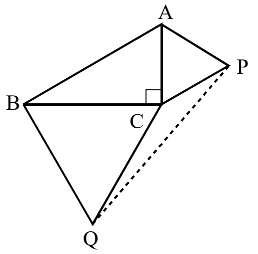


3. במשולש ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ, $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. חשב את אורך הצלע AC.

תשובה: 5.344 ס"מ או 11.98 ס"מ.

4. במשולש ישר-זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) נתון: $AB = 28.3$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 32^\circ$. על הניצבים AC ו- BC בנו משולשים שווי-צלעות ACP ו- BCQ. חשב את אורך הקטע PQ.

תשובה: 37.74 ס"מ.

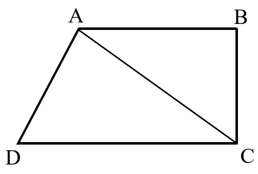


5. $ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית ($AB \parallel CD$, $BC \perp DC$). נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = CD$.

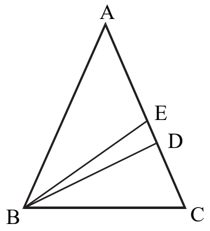
א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.

ב. חשב את היחס הנ"ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.

תשובה: א. $\frac{1}{\cos\alpha}$. ב. 2.



6. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD הוא הגובה לשוק ו- BE הוא חוצה זווית
של $\sphericalangle ABC$. נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$ $(\alpha < 30^\circ)$,
$AB = AC =$ 10 ס"מ.
א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BDE.
ב. הצב $\alpha = 30^\circ$ בביטוי שקיבלת בסעיף א'.
הסבר את התוצאה שקיבלת.

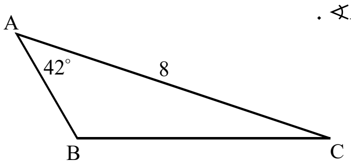


תשובה: א. $50\sin^2 2\alpha \tan(45^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha)$. ב. 0.

7. אורך צלע במשולש הוא 15 ס"מ ואחת הזוויות שלידה היא 68°. אורך חוצה-זווית זו הוא 11 ס"מ. חשב את האורך של שתי הצלעות האחרות.

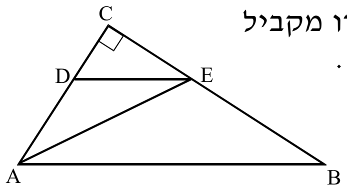
תשובה: 15.26 ס"מ, 11.90 ס"מ.

8. במשולש ABC נתון: $AC =$ 8 ס"מ, $\sphericalangle A = 42^\circ$.
והצלע BC ארוכה ב- 5 ס"מ מהצלע AB.
א. חשב את אורך הצלע BC.
ב. BD הוא תיכון לצלע AC.
חשב את שטח המשולש BCD.



תשובה: א. 6.782 ס"מ. ב. 2.385 סמ"ר.

9. במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו- E.
נתון: $DE = m$, $\sphericalangle ABE = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α
את אורכי הקטעים AB ו- BE.

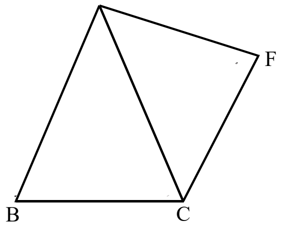


תשובה: $\frac{m\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $\frac{m\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

10. במשולש ABC נתון: $AB = 2AC$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.
מצא את גודלן של הזוויות B ו- C.

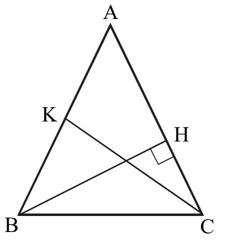
תשובה: 19.11°, 40.89°.

11. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
בנו על השוק AC משולש שווה-שוקיים AFC
כך ש- $AF = CF = BC = a$.
נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle AFC = \beta$.
א. (1) הבע את האורך של השוק AC
באמצעות a ו- α.
(2) הוכח כי $\cos\beta = 1 - \frac{1}{8\cos^2\alpha}$.
ב. נתון כי משולש AFC הוא ישר-זווית.
מצא את הזוויות במשולש ABC.



תשובה: א. (1) $\frac{a}{2\cos\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$. ב. 69.295°, 69.295°, 41.41°.

12. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ שווה אורך הבסיס ל- a, והזווית שלידו ל- β $(\beta > 45^\circ)$.
BH הוא גובה לשוק AC ו- CK תיכון לשוק AB.
הבע באמצעות a ו- β:
א. את אורך הקטע AH.
ב. את שטח המשולש AKH.

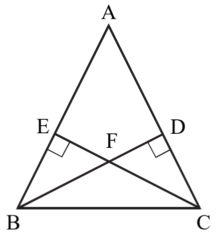


תשובה: א. $\frac{-a\sin\beta\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = a\sin\beta\tan(2\beta - 90^\circ)$. ב. $\frac{-a^2\sin^2\beta\cos 2\beta}{4\sin 2\beta}$.

בעיות המשלבות גיאומטריה וטריגונומטריה

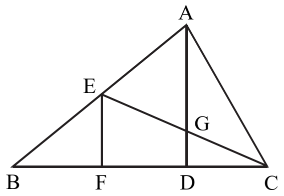
השאלות הבאות משלבות ידע מגיאומטריה וטריגונומטריה.

1. במשולש ABC, BD ו- CE הם גבהים לצלעות AC ו- AB. נתון: $BD = CE$.
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.
ב. נתון: $CE = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.
חשב את הזווית BAC.



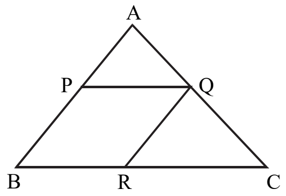
תשובה: ב. 64.01°.

2. AD הוא הגובה ל- BC במשולש ABC.
EF הוא הגובה ל- BC במשולש EBC.
נתון: $BF = FD = DC$.
א. הוכח: $AG = 3DG$.
ב. נתון: $DF = 2DG$. חשב את הזווית ACG.



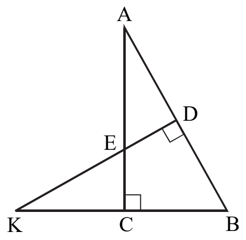
תשובה: ב. 36.87°.

3. במשולש ABC חסום מעוין $BPQR$.
נתון: $BP = 4.8$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
א. מצא את אורך הצלע AB.
ב. נתון גם: $\sphericalangle BAC = 72^\circ$.
חשב את אורך הקטע CQ.



תשובה: א. 8 ס"מ. ב. 7.051 ס"מ.

4. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle C = 90^\circ)$.
האנך האמצעי ליתר AB חותך את היתר בנקודה D, את הניצב AC בנקודה E ואת המשך הניצב BC בנקודה K.
א. הוכח: $\Delta AED \sim \Delta KBD$.
ב. נתון: $DE = a$, $KE = 3a$.
חשב את הזווית B.

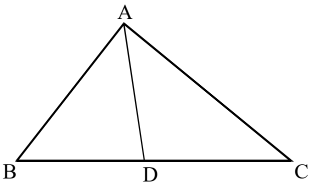


תשובה: ב. 63.43°.

5. AD הוא חוצה-זווית A במשולש ABC (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAC = 50^\circ$, $BD =$ 4 ס"מ, $DC =$ 5 ס"מ.

א. מצא את היחס בין הצלע AC לצלע AB.

ב. מצא את אורך הצלע AB.



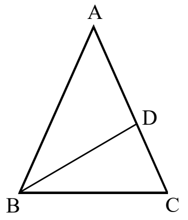
תשובה: א. $5:4$. ב. 9.207 ס"מ.

6. ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$.

נתון: $BD = BC$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$.

א. חשב את זוויותיו של המשולש ABC.

ב. הבע את אורך בסיס המשולש בעזרת b - שוק המשולש.



תשובה: א. 72°, 72°, 36°. ב. $0.618b$.

7. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.

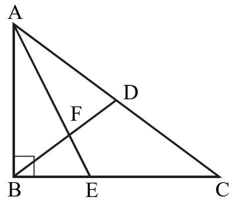
BD הוא התיכון לצלע AC

ו- AE חוצה את הזווית BAC.

נתון: $BE =$ 3 ס"מ, $CE =$ 5 ס"מ.

א. חשב את אורך היתר AC.

ב. חשב את שטח המשולש ADF.



תשובה: א. 10 ס"מ. ב. $5\frac{5}{11}$ סמ"ר.

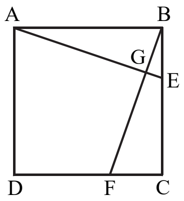
8. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות BC ו- DC של ריבוע ABCD. נתון: $BE = CF$.

א. הוכח: המרובע AGFD בר-חסימה במעגל.

ב. הוכח: $\sphericalangle DGF = \sphericalangle DAF$.

ג. נתון: $DF =$ 4 ס"מ, $CF =$ 2 ס"מ.

חשב את הזווית DGF.



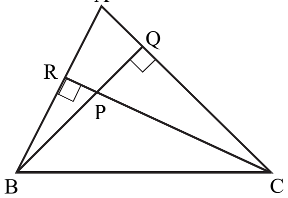
תשובה: ג. 33.69°.

9. CR ו- BQ הם גבהים במשולש ABC הנחתכים בנקודה P. נתון: $CP =$ 9 ס"מ, $BP =$ 6 ס"מ, $S_{BPR} =$ 8 סמ"ר, $BR > PR$.

א. הוכח: $\Delta BPR \sim \Delta CPQ$.

ב. חשב את שטח המשולש CPQ.

ג. חשב את הזווית PCQ.



תשובה: ב. 18 סמ"ר. ג. 31.37°.

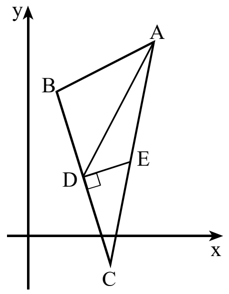
הנדסה אנליטית (4 יחידות)

.1 במשולש ABC משוואת הצלע BC היא $y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$. נתון: $A(-1;11)$.
AD הוא הגובה לצלע BC . מצא את שיעורי הנקודה D .

תשובה: $(1;3)$.

.2 במשולש ABC משוואת הגובה לצלע AB היא $y=2x-5$ ומשוואת הגובה לצלע AC היא $3y-x=0$.
אחד מקדקודי המשולש הוא בנקודה $(13;-9)$.
א. איזה מקדקודי המשולש הוא בנקודה $(13;-9)$?
ב. מצא את שני הקדקודים האחרים של המשולש.

תשובה: א. A . ב. $B(-3;-1)$, $C(7;9)$.



.3 במשולש ABC DE הוא אנך אמצעי לצלע BC .
משוואת התיכון AD היא $y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$.
משוואת DE היא $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.
משוואת הצלע AB היא $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$.
מצא את שיעורי הקדקודים A , B ו- C .

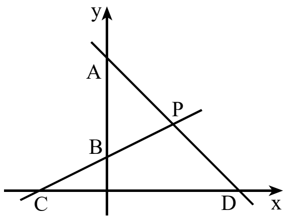
תשובה: $A(5;7)$, $B(1;5)$, $C(3;-1)$.

.4 במשולש ABC משוואת הצלע AB היא $y=3x-5$. נתון: $B(4;7)$.
משוואת התיכון CD לצלע AB היא $y=-x+15$.
א. מצא את שיעורי הקדקוד A .   ב. הוכח: $S_{ADC}=S_{BDC}$.

תשובה: א. $(6;13)$.

.5 א. מצא את הנקודות על הישר $y=x+2$ שמרחקן מהנקודה $(7;8)$ הוא 5 .
ב. מצא נקודה על הישר $x=4$ הנמצאת במרחק שווה מהנקודות $E(1;9)$ ו- $F(6;4)$.

תשובה: א. $(10;12)$ או $(3;5)$. ב. $(4;6)$.



.6 בציור מתוארים הישרים AD ו- BC הנחתכים בנקודה $P(6;6)$.
משוואת הישר BC היא $y=mx+3$.
שטח המשולש ABP הוא 27 יח"ר.
א. מצא את הערך של m .
ב. חשב את שטח המרובע BODP
(O - ראשית הצירים).

תשובה: א. $\frac{1}{2}$. ב. 45 יח"ר.

7. המשולש ABC הוא ישר-זווית. משוואת היתר AC היא $y=-\frac{1}{3}x+7$ ומשוואת הניצב BC היא $y=2x$. הנקודה $D(-2;1)$ נמצאת על הניצב AB.
א. מצא את שיעורי הקדקוד A.
ב. מצא את משוואת הגובה ליתר AC.

תשובה: א. $(-42;21)$. ב. $y=3x$.

8. במשולש ישר-זווית ABC, הזווית ACB היא ישרה. נתון: $A=(0;6)$, $B=(21;9)$, והקדקוד C נמצא על ציר ה-x. מהם שיעורי הקדקוד C?
מצא את שני הפתרונות האפשריים, C_1 ו-C_2.

תשובה: $(3;0)$ או $(18;0)$.

9. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB=AC)$ נתון: $B(3;16)$, $C(-1;14)$.
א. מצא את שיעורי הקדקוד A, אם נתון שהוא נמצא על הישר $y=9$.
ב. מצא את משוואת הגובה לשוק AC.

תשובה: א. $(4;9)$. ב. $y=x+13$.

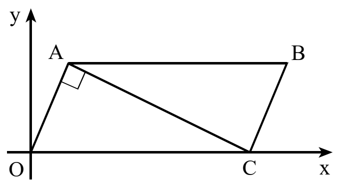
10. ABC הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים $(\sphericalangle C=90^\circ)$.
נתון: $C(8;3)$, $B(4;1)$.
א. מצא את משוואת הניצב AC.
ב. מצא את שיעורי הנקודה A (שני פתרונות).

תשובה: א. $y=-2x+19$. ב. $(6;7)$ או $(10;-1)$.

11. במקבילית ABCD משוואת הצלע AB היא $y=\frac{1}{3}x+7$ ומשוואת הצלע AD היא $y=-2x-7$. אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה $(3;4.5)$.
מצא את שיעורי קדקודי המקבילית.

תשובה: $A(-6;5)$, $B(9;10)$, $C(12;4)$, $D(-3;-1)$.

12. נתונה מקבילית OABC. קדקוד O בראשית הצירים. משוואת הצלע AB היא $y=4$. נתון: $\sphericalangle OAC=90^\circ$, $C(10;0)$.
א. מצא את השיעורים של הקדקוד A
(רשום את שתי האפשרויות).
ב. חשב את שטח המקבילית, עבור כל אחת מהאפשרויות שמצאת בסעיף א'.



תשובה: א. $(2;4)$ או $(8;4)$. ב. 40 יח"ר או 40 יח"ר.

13. ABCD הוא מלבן ששניים מקדקודיו הם $A(1;2)$ ו-$B(-1;-2)$.
האלכסון AC נמצא על הישר $7x+ky=15$.
א. מצא את הערך של k.
ב. מצא את שני הקדקודים האחרים של המלבן.

תשובה: א. 4. ב. $C(5;-5)$, $D(7;-1)$.

14. ABCD הוא מלבן ששניים מקדקודיו הם $A(-3;-2)$ ו-$D(-4;2)$.
אורך הצלע AB הוא $2\sqrt{17}$.
א. מצא את שיעורי הקדקוד B. רשום את שתי האפשרויות.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C. רשום את שתי האפשרויות.

תשובה: א. $(5;0)$ או $(-11;-4)$. ב. $(4;4)$ או $(-12;0)$.

15. במעוין ABCD , שניים מהקדקודים הם $A(3;1)$ ו- $B(7;4)$. משוואת האלכסון AC היא $y=2x-5$. מצא את שיעורי הקדקודים C ו- D .

תשובה: $C(7;9)$, $D(3;6)$.

16. במעוין ABCD האלכסון AC מונח על הישר $y=2x-8$, הצלע AB מונחת על הישר $y=-8x+2$. אלכסוני המעוין נחתכים על ציר ה- x .
א. מצא את קדקודי המעוין.
ב. חשב את שטח המעוין.

תשובה: א. $A(1;-6)$, $B(0;2)$, $C(7;6)$, $D(8;-2)$. ב. 60 .

17. שני קדקודים סמוכים של ריבוע הם בנקודות $A(1;4)$ ו- $B(3;4)$.
א. מצא את משוואת הצלע BC .
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C (שתי אפשרויות).

תשובה: א. $x=3$. ב. $(3;6)$ או $(3;2)$.

18. קדקודי המרובע ABCD הם: $A(8;6)$, $B(12;4)$, $C(11;1)$, $D(5;4)$.
א. הוכח שהמרובע הוא טרפז.
ב. חשב את אורך הגובה היורד מקדקוד A לצלע DC .
ג. חשב את שטח הטרפז.

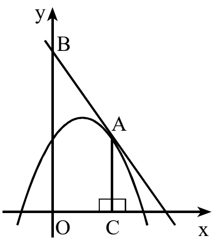
תשובה: ב. $\sqrt{9.8}$. ג. 17.5 .

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (4 יחידות)

1. הישר $y=5$ חותך את הפרבולה $y=x^2+1$ בשתי נקודות.
א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות אלה.
ב. מצא את נקודת החיתוך בין שני המשיקים שמצאת בסעיף א׳.

תשובה: א. $y=-4x-3$, $y=4x-3$. ב. $(0;-3)$.

2. לגרף הפונקציה $y=-x^2+2x+3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).



תשובה: 10 .

3. הישר $y=2x+4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2+8x+c$.
מצא את ערכו של c .

תשובה: 13 .

4. לגרף הפונקציה $y=ax^2+1$ מעבירים משיק בנקודה $x=1$.
א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.
ב. המשיק שמצאת בסעיף א׳ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.
מצא את a .

תשובה: א. $y=2ax+1-a$. ב. $-\frac{1}{3}$.

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

5. $y=x(12-x^2)$

6. $y=x^4-18x^2+32$

7. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+15x^2-63x+49$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון,
תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1;0)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x ?

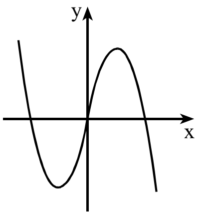
8. חקור את הפונקציה $y=3x^4-8x^3+6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה.
ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה $y=x^4-4x^2$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y=k$:
(1) ב- 4 נקודות. **(2)** ב- 3 נקודות . **(3)** ב- 2 נקודות. **(4)** באף נקודה.

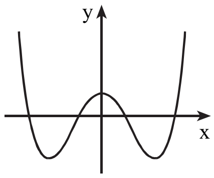
10. לפונקציה $f(x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+mx+10$ יש נקודת קיצון ב- $x=1$.
א. מצא את m .
ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)-13=0$.

תשובות:

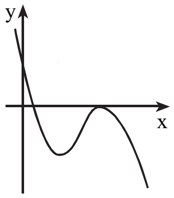
5. א. כל x .
ב. $(2;16)$ מקסימום, $(-2;-16)$ מינימום.
ג. עלייה: $-2<x<2$,
ירידה: $x<-2$ או $x>2$.
ד. $(0;0)$, $(3.464;0)$, $(-3.464;0)$.



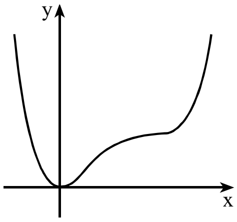
6. א. כל x .
ב. $(3;-49)$ מינימום, $(0;32)$ מקסימום,
$(-3;-49)$ מינימום.
ג. עלייה: $-3<x<0$ או $x>3$.
ירידה: $0<x<3$ או $x<-3$.
ד. $(0;32)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.



7. א. תחום הגדרה: כל x .
נקודות קיצון: $(3;-32)$ מינימום,
$(7;0)$ מקסימום.
עלייה: $3<x<7$; ירידה: $x>7$ או $x<3$.
נקודת חיתוך: $(0;49)$.
ד. בשתי נקודות.

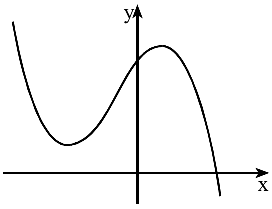


8. א. כל x .
ב. $(0;0)$ מינימום.
ג. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$.
ד. $(0;0)$.



9. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{2};-4)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-\sqrt{2};-4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$.
ב. חיוביות: $x>2$ או $x<-2$, שליליות: $-2<x<2$, $x\neq 0$.
ג. **(1)** $-4<k<0$. **(2)** $k=0$. **(3)** $k>0$ או $k=-4$. **(4)** $k<-4$.

10. א. 3 .
ב. $(1;11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3;1)$ מינימום.
ג. פתרון אחד.



11. הפונקציה $y=x^3-15x^2+48x-3$ מוגדרת בקטע $[0,11]$.
א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.

תשובה: א. 41 , -67 .

12. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $y=(x^2-8)^5$ בנקודה $x=3$.

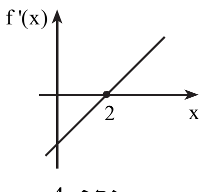
תשובה: $y=30x-89$.

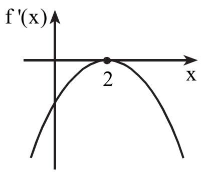
13. לגרף הפונקציה $y=(x+4)^3$ מעבירים שני משיקים בעלי שיפוע 3 .
א. מצא את שיעורי נקודות ההשקה.
ב. מצא את משוואות המשיקים.

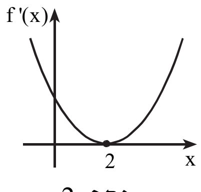
תשובה: א. $(-3;1)$, $(-5;-1)$. ב. $y=3x+10$, $y=3x+14$.

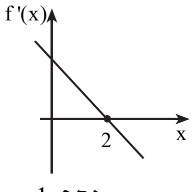
14. מצא עבור הפונקציה $y=(x^2-6x)^3$:
א. נקודות מינימום ומקסימום. ב. תחומי עלייה וירידה.
ג. נקודות חיתוך עם הצירים. ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

15. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x=2$.
א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x<2$?
ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



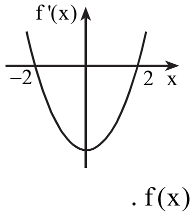






16. לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד. נקודת מקסימום ב- $x=-1$ ונקודת מינימום ב- $x=5$. שרטט גרף של הפונקציה הנגזרת $g'(x)$.

17. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
ג. נתון גם : $f(0)=0$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

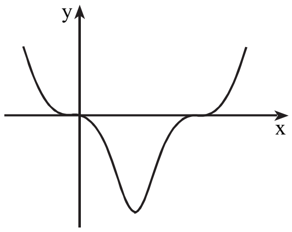


18. נתונה הפונקציה $y = x^2 + 4ax - 5a^2$, $a > 0$.
א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a).
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. נתון כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הוא 8 . מהי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y ?

תשובות:

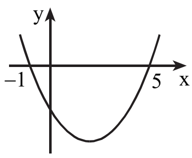
14. א. $(3;-729)$ מינימום.

ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.
ג. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

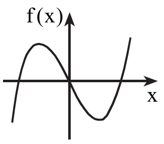


15. א. חיובי. ב. גרף 1.

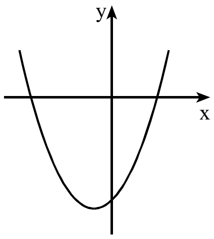
16.



17. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$, ג.
ירידה: $-2 < x < 2$.
ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.



18. א. תחום הגדרה: כל x .
נקודות קיצון: $(-2a;-9a^2)$ מינימום.
תחומי עלייה: $x > -2a$, תחומי ירידה: $x < -2a$.
נקודות חיתוך: $(0;-5a^2)$, $(a;0)$, $(-5a;0)$.



ג. $(0;-8\frac{8}{9})$.

עבודת קיץ – פונקציות רציונליות (4 יחידות)

1. נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2+8x}{x^2+8}$.

א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא לאילו ערכים של k , הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה:
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

2. לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+ax}{x^2-7x+10}$ יש נקודת קיצון ב- $x=3$.

א. מצא את a .

ב. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק לגרף הפונקציה. חשב את המרחק בין שני המשיקים.

3. הישר $x=-1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y=\frac{ax+16}{x^2-3x-b}$. בנקודה $x=2$ לפונקציה יש נקודת קיצון.

א. מצא את a ואת b .

ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- x וישר המקביל לציר ה- y . ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מלבן. חשב את שטח המלבן.

4. לפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+8x-28}{x^2-4}$ יש אסימפטוטה אופקית $y=2$.

א. מצא את a .

ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. (1) מצא את נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה לבין האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

(2) מצא לאילו ערכי x גרף הפונקציה נמצא מעל האסימפטוטה האופקית שלו.

5. לפונקציה $f(x)=\frac{2x^3+ax}{x^2-1}$ יש מינימום בנקודה $x=2$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=7$?

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{Ax^2+x-2}{x^2-x-2}$.
בנקודה שבה $x=1$ שיפוע המשיק הוא $-\frac{3}{2}$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. מצא אסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x)=3f(x)+k$. האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$ היא $y=5$. מצא את הערך של k .

7. גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-x-m}{x^2}$ חותך את האסימפטוטה האופקית שלו ב- $x=-2$.
א. מצא את m .
ב. מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא לאילו ערכים של k , יש למשוואה $f(x)=k$:
(1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) אף פתרון.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{x^2-kx}$.
תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\neq 0$, $x\neq 5$.
א. מצא את הערך של k .
ב. הוכח שהפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ד. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-k}{x-3}$, $k\neq 3$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. לאילו ערכים של k הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל x בתחום ההגדרה?
ג. ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=k$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=5$. מצא את הערך של k ,
אם נתון כי הפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-k}{x^2-9}$, $(k\neq 9)$.
א. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה והבע באמצעות k את שיעור ה- y של הנקודה.
ב. ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y=2$ מקביל לציר ה- x .
מצא את הערך של k .
ג. הוכח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{-1}{1-x^2}$. בהסתמך על סעיפים א׳ ו-ב׳ בלבד (כלומר מבלי לחקור את הפונקציה $g(x)$) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

12. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-8x}{x^2+4}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $f(x)$, כלומר $g(x)=f'(x)$.
שרטט בתחום $-2\le x\le 2$ את גרף הפונקציה $g(x)$.
הנח שבתחום הנ״ל יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד.

13. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{3-x}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה, (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם **הנגזרת** $f'(x)$ שלילית.

14. נתונה הפונקציה $y=\frac{1}{x^2-2kx}$, $k>0$. הבע באמצעות k את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון.

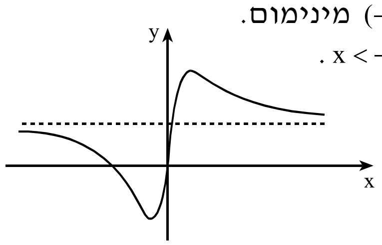
15. נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2}{x+a}$ $(a>0)$.

א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה (במידת הצורך הבע באמצעות a).

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

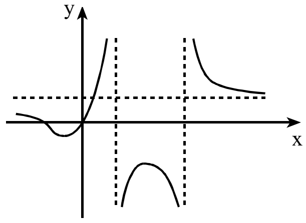
תשובות:

1. א. תחום הגדרה: כל x.
נקודות קיצון: $(4;2)$ מקסימום, $(-2;-1)$ מינימום.
עלייה: $-2<x<4$, ירידה: $x>4$ או $x<-2$.
נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(-8;0)$.
אסימפטוטות: $y=1$.



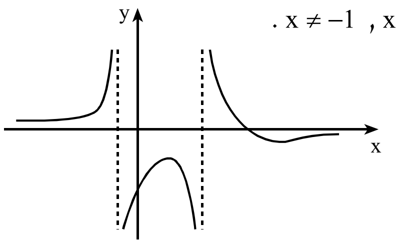
ג. (1) $k=1$ או $k=2$ או $k=-1$.
(2) $-1<k<2$, $k\neq 1$.
(3) $k>2$ או $k<-1$.

2. א. 6. ב. תחום הגדרה: $x\neq 2$, $x\neq 5$.

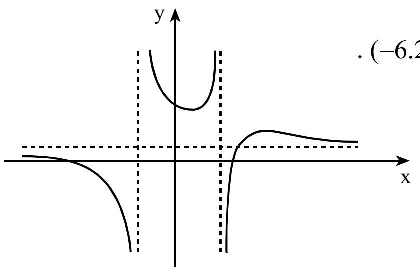


נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(-3;0)$.
עלייה: $2<x<3$ או $-1<x<2$.
ירידה: $x>5$ או $3<x<5$ או $x<-1$.
$(3;-18)$ מקסימום, $(-1;-\frac{2}{9})$ מינימום.
אסימפטוטות: $x=2$, $x=5$, $y=2$. ד. $17\frac{7}{9}$.

3. א. $a=-2$, $b=4$. ב. תחום הגדרה: $x\neq 4$, $x\neq -1$.
נקודות חיתוך: $(0;-4)$, $(8;0)$.
אסימפטוטות: $x=-1$, $x=4$, $y=0$.
נקודות קיצון: $(2;-2)$ מקסימום,
$(14;-0.08)$ מינימום.
עלייה: $x>14$ או $-1<x<2$ או $x<-1$.
ירידה: $4<x<14$ או $2<x<4$. ד. 23.04.



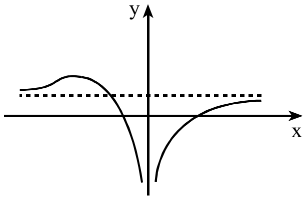
4. א. 2. ב. תחום הגדרה: $x\neq 2$, $x\neq -2$.
נקודות חיתוך: $(0;7)$, $(2.243;0)$, $(-6.243;0)$.
אסימפטוטות: $x=2$, $x=-2$, $y=2$.
נקודות קיצון: $(4;3)$ מקסימום,
$(1;6)$ מינימום. עלייה: $2<x<4$
או $1<x<2$. ירידה: $x>4$ או
$-2<x<1$ או $x<-2$.
ד. **(1)** $(2.5;2)$. **(2)** $x>2.5$ או $-2<x<2$.



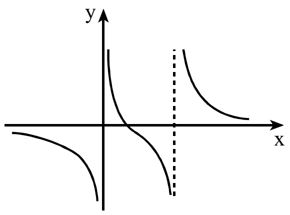
5. א. 1.6. ב. $x=1$, $x=-1$. ג. $(2;6.4)$ מינימום, $(-2;-6.4)$ מקסימום.
ד. שלושה.

6. א. $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$. ב. $y=1$, $x=-1$, $x=2$. ג. 2.

7. א. $m=2$. ב. תחום הגדרה: $x\neq 0$.
נקודות קיצון: $(-4;1\frac{1}{8})$ מקסימום.
עלייה: $x>0$ או $x<-4$, ירידה: $-4<x<0$.
נקודות חיתוך: $(2;0)$, $(-1;0)$.
אסימפטוטות: $x=0$, $y=1$.
ד. **(1)** $k=1$ או $k=1\frac{1}{8}$. **(2)** $k<1\frac{1}{8}$, $k\neq 1$. **(3)** $k>1\frac{1}{8}$.



8. א. 5.
ג. נקודות חיתוך: $(2;0)$.
אסימפטוטות: $x=0$, $x=5$, $y=0$.
ד. חיוביות: $x>5$ או $0<x<2$.
שליליות: $2<x<5$ או $x<0$.



9. א. $x\neq 3$. ב. $k<3$. ג. 1.

.10 א. $x=0$, $y=\frac{k}{9}$. ב. 18 .

.11 א. (1) $x\neq 1$, $x\neq -1$.

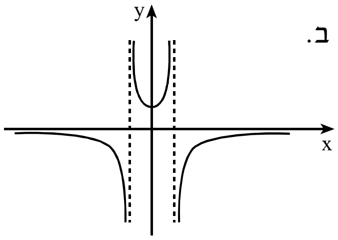
(2) $(0;1)$ מינימום.

(3) עלייה: $x>1$ או $0<x<1$;

ירידה: $-1<x<0$ או $x<-1$.

(4) $(0;1)$. (5) $x=-1$, $x=1$, $y=0$.

ב.



ג. $(0;-1)$ מקסימום.

.12 א. (1) כל x .

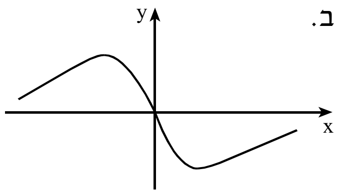
(2) $(-2;2)$ מקסימום, $(2;-2)$ מינימום.

(3) עלייה: $x>2$ או $x<-2$,

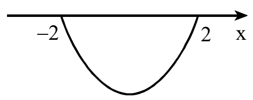
ירידה: $-2<x<2$.

(4) $(0;0)$. (5) $y=0$.

ב.



ג.



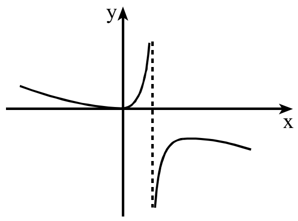
.13 א. (1) $x\neq 3$.

(2) $(0;0)$ מינימום, $(6;-12)$ מקסימום.

(3) עלייה: $3<x<6$ או $0<x<3$;

ירידה: $x>6$ או $x<0$.

(4) $(0;0)$. (5) $x=3$. ג. $x>6$.



.14 $(k;-\frac{1}{k^2})$ מקסימום.

.15 א. תחום הגדרה: $x\neq -a$. נקודות חיתוך: $(0;0)$.

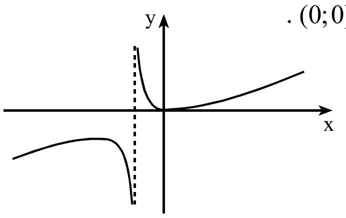
אסימפטוטות: $x=-a$.

נקודות קיצון: $(0;0)$ מינימום,

$(-2a;-4a)$ מקסימום.

עלייה: $x>0$ או $x<-2a$;

ירידה: $-a<x<0$ או $-2a<x<-a$.



עבודת קיץ – בעיות קיצון (4 יחידות)

1. מבין כל זוגות המספרים שהפרש ביניהם 4, מצא את זוג המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי.

תשובה: 2 , -2 .

2. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

תשובה: 4 , 6 , 3456 .

3. מבין כל שלושת המספרים החיוביים שסכומם $9a$ $(a > 0)$, ושאחד מהם גדול פי שניים מהשני, מצא את המספרים שמכפלתם מקסימלית.

תשובה: $4a$, $2a$, $3a$.

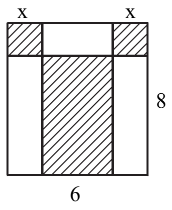
4. חותכים חוט שאורכו 80 ס״מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

תשובה: 40 ס״מ, 40 ס״מ.

5. סכום אורכי האלכסונים במעוין הוא 6 ס״מ.
מה צריך להיות אורכו של כל אלכסון כדי ששטח המעוין יהיה מקסימלי?

תשובה: 3 ס״מ, 3 ס״מ.

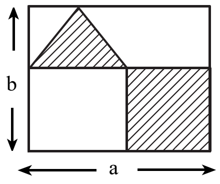
6. בחלון מלבני שממדיו 8 מטרים ו- 6 מטרים רוצים להרכיב זכוכית משני סוגים: בשטחים המקווקווים המורכבים משני ריבועים שצלעם x וממלבן נוסף רוצים להרכיב זכוכית צבעונית, ובשטחים הלבנים שבציור רוצים להרכיב זכוכית שקופה (ראה ציור).



א. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הזכוכית השקופה יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של הזכוכית השקופה?

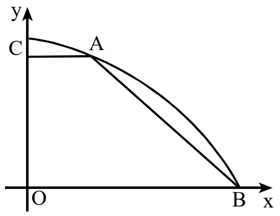
תשובה: א. 2.75 מטר. ב. 30.25 מ״ר.

7. בתוך מלבן שאורכו a ורוחבו b חסומים ריבוע ומשולש מקווקווים.
מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של הריבוע והמשולש יהיה מינימלי? הבע על ידי a ו- b .



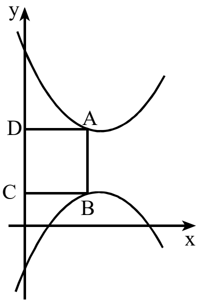
תשובה: $\frac{a+b}{6}$.

8. נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y=-x^2+81$
ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה- x.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,
כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC
יהיה מקסימלי.



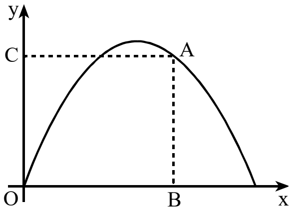
תשובה: $(3;72)$.

9. נקודה A נמצאת על הפונקציה $y=x^2-3x+9$
ברביע הראשון. נקודה B נמצאת על הפונקציה
$y=-x^2+3x-2$ ברביע הראשון. הקטע AB מקביל
לציר ה- y. הנקודות C ו- D נמצאת על ציר ה- y
כך ש- ABCD מלבן. מצא מה צריכים להיות שיעורי
הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי.



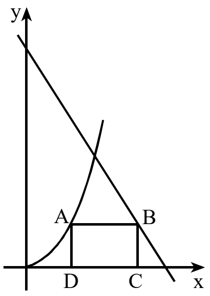
תשובה: $(1.25;6.8125)$.

10. בנקודה הנמצאת על הפרבולה $y=-x^2+5x$,
בקטע $0\le x\le 5$, מורידים אנכים לצירים,
כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A:
א. כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
ב. כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



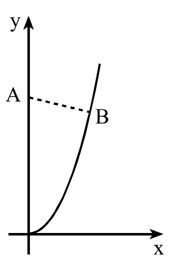
תשובה: א. $(3;6)$. ב. $(0;0)$.

11. מתבוננים בכל המלבנים ABCD החסומים ברביע
הראשון בין גרף הפרבולה $y=x^2$, הישר $y=-2x+14$
וציר ה- x, כמתואר בציור.
א. שיעורי הקדקוד D הם $(x_o;0)$.
הבע את שיעורי הקדקוד A ואת שיעורי
הקדקוד B באמצעות x_o.
ב. מהו הערך של x_o במלבן בעל השטח המקסימלי?



תשובה: א. $A(x_0;x_0^2)$, $B\left(\frac{14-x_0^2}{2};x_0^2\right)$. ב. $x_0=2$.

12. לפניך חלק של הפרבולה שמשוואתה $y=x^2$,
הנמצא ברביע הראשון. נתון: $A(0;4\frac{1}{2})$.
א. מצא על הפרבולה את הנקודה B,
כך שריבוע המרחק AB הוא מינימלי.
ב. הראה כי המשיק לפרבולה בנקודה B,
שאותה מצאת בסעיף א', ניצב לישר AB.



תשובה: א. $(2;4)$.